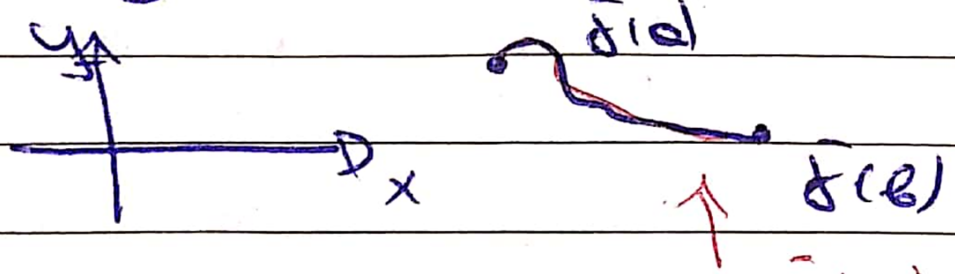
30/11/2020

Λίγα λόγια για καμπύλες ...

Ορισμός: $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, $\bar{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$ συνεχής. Τότε η $\bar{\gamma}$ ονομάζεται παραμετρική καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ με παράμετρο $t \in I$, και η εικόνα της $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}(I) \subset \mathbb{R}^n$, ονομάζεται καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$.



$\bar{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$\bar{\gamma}(I) = \{\bar{\gamma}(t) : t \in [a,b]\}$

Παρατήρηση: Η παραμετρική καμπύλη είναι μία απεικόνιση. Η καμπύλη είναι ένα σύνολο. Κάθε παρ. καμπύλη έχει ως εικόνα μια καμπύλη και κάθε καμπ. παραμετρικοποιείται από μία παραμετρική καμπύλη.

[Π.χ. Έστω δοσμένος "στίβος" ⬭ $\subset \mathbb{R}^2$. Αυτός είναι καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$. Έστω δρομέας που διανύει (διατρέχει) τον στίβο (δηλ. σε κάθε χρονική στιγμή $t \in [0,T]$, $T>0$ βρίσκεται σ' ένα σημείο $\gamma(t) \in$ ⬭ και $\gamma[0,T] =$ ⬭) τότε η διαδρομή / δρόμος / τροχιά που διανύει ο δρομέας είναι μια παραμετρικοποίηση του στίβου]

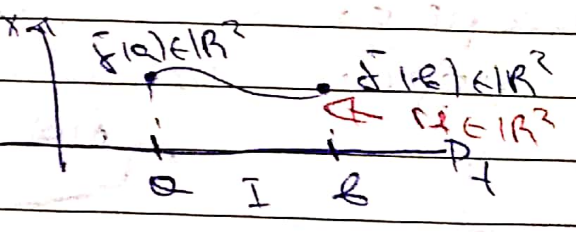
Παρατήρηση: Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι μια δοσμένη καμπύλη $C \subset \mathbb{R}^n$ μπορεί να παραμετρικοποιηθεί με διαφορετικούς τρόπους (υπεραριθμήσιμα πολλούς)

π.χ.

Αν $C =$ ο στίβος, τότε κάθε δρομέας που ξεκινάει τη χρονική $t=0$ και τερματίζει τη χρ. στιγμή $t = T>0$, δίνει μια διαφορετική παραμετρικοποίηση, αν $T>0$ είναι διαφορετικό $\gamma: [0,T] \to C \subset \mathbb{R}^n$.

Παραδείγματα: 1) Το γράφημα $\Gamma_f = \{(t, f(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$ μιας ~~συνεχούς~~ συνεχούς συνάρτησης $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Εδώ:

$\gamma(t) = (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2, \; t \in I$



2) κύκλος κέντρου $(0,0)$, ακτίνας $r>0$, στον $\mathbb{R}^2$

$\bar{\gamma}(t) := r(\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ (1)

$\bar{\gamma}_1(t) := r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (2)

$\bar{\gamma}_2(t) := r(\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0, \pi]$ (3)

$\bar{\gamma}_3(t) := r(\cos(-t), \sin(-t))$, $t \in [0, 2\pi]$ (4)

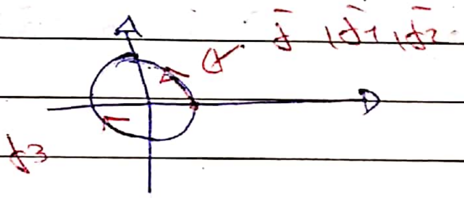
Όλες αυτές οι παραμετρικοποιήσεις έχουν την ίδια εικόνα: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$, αλλά διαφέρουν μεταξύ τους

(1) Διατρέχει C άπειρες φορές

(2) Διατρέχει C μία φορά προς τη μαθηματικά θετική κατεύθυνση με νόρμα ταχύτητας $= r$}

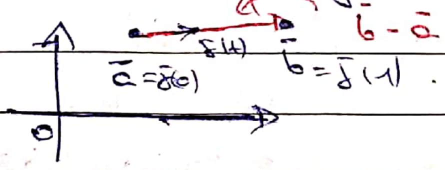
(3) Διατρέχει C μία φορά, μαθημ. κατευθ. με νόρμα ταχ. $= 2r$

(4) Διατρέχει C μία φορά, μαθημ. ~~προ~~ αρνητική κατεύθυνση με νόρμα ταχ $= r$



$\bar{\gamma}_1(0) = \bar{\gamma}_1(2\pi) = \bar{\gamma}_2(0) = \bar{\gamma}_2(\pi) = \bar{\gamma}_3(0) =$
$= \bar{\gamma}_3(2\pi)$

(3) Ευθύγραμμο τμήμα από το $\bar{a}$ στο $\bar{b}$ ($\bar{a} \neq \bar{b}$) στον $\mathbb{R}^n$: $\bar{\gamma}(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a})$, $t \in [0,1]$ $= (1-t)\bar{a} + t\bar{b}$



Ορισμοί (α) $\bar{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$ 1-1 $:\Leftrightarrow$: η $\bar{\gamma}$ λέγεται απλή

(β) $I = [a,b]$, $\bar{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$, τότε $\bar{\gamma}(a)$ αρχικό, $\bar{\gamma}(b)$ τελικό σημείο και αν $\bar{\gamma}(a) = \bar{\gamma}(b)$, η $\bar{\gamma}$ λέγεται κλειστή δ) Μία καμπύλη $\vec{\gamma}$ λέγεται απλή (καμπύλη) αν η $\vec{\gamma}|[a,b)$ είναι 1-1 (δηλ. απλή)

Υπενθύμιση: $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, $\vec{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$ παραμετρική καμπύλη αν $\vec{\gamma}$ συνεχής, δηλ. $\vec{\gamma}$ συνεχής σε κάθε $t_0 \in I$ δηλ. $\forall (t_n) \subset I$ με $t_n \to t_0$: $\underbrace{\vec{\gamma}(t_n) \to \vec{\gamma}(t_0)}_{\Leftrightarrow}$ //

$\|\vec{\gamma}(t_n) - \vec{\gamma}(t_0)\| \to 0$

Με $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$

Ισχύει $\vec{\gamma}$ συνεχής στο $t_0 \Leftrightarrow \gamma_i$ συνεχείς στο t_0 $\forall i = 1..n$

Π.χ. Για το παραδ. 1) $\vec{\gamma}(t) = (t, f(t))$, $t \in I$ είναι συνεχής αν $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής

Για το παραδ. 2) $\vec{\gamma}(t) = r(\cos t, \sin t)$ συνεχής

Για το παραδ. 3) $\|\vec{\gamma}(t_n) - \vec{\gamma}(t_0)\| = \|\vec{a} + t_n\vec{b} - (\vec{a} + t_0\vec{b})\| =$
$= |t_n - t_0| \cdot \|\vec{b}\|$

$\to 0$

$t_n \to t_0$

Ορισμός διαφορίσιμης παραμετρικής καμπύλης και της παραγώγου της: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, $\vec{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$ παραμ. καμπύλη ($\Rightarrow \vec{\gamma}$ συνεχής). Η παραμ. καμπύλη ονομάζεται διαφορίσιμη στο $t_0 \in I$, αν $\exists$ $\vec{\gamma}'(t_0) = D\vec{\gamma}(t_0) =$
$= \begin{pmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t_0) \end{pmatrix}$: παράγωγος της $\vec{\gamma}$ στο t_0

[αφού τότε $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\bar f(t_0+h) - \bar f(t) - \bar f'(t_0)h}{h} = \bar 0$

(βλ. ορισμό διαφορισιμότητας μιας $\bar f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar x_0 \in U$) $\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_i(t_0+h)-f_i(t_0)}{h} = f_i'(t_0)$

$\forall i=1,\dots,n$ $\Leftrightarrow$ $\forall i=1..n$ οι $f_i': I\to\mathbb{R}$ είναι διαφ/μες στο t_0]

Συναφείς ορισμοί: i) Αν $\bar f: I\to\mathbb{R}^n$ είναι διαφ. σε κάθε $t\in I$, τότε η $\bar f$ ονομάζεται διαφ/μη (σκέτο)

ii) Αν $\bar f: I\to\mathbb{R}^n$ διαφ. και $\forall i=1,\dots,n$, $f_i': I\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς, τότε η $\bar f$ ονομάζεται συνεχώς διαφορίσιμη ($\Leftrightarrow$ έχει συνεχείς παραγώγους) ή C^1 (λέμε $\bar f$ είναι μια C^1 καμπύλη)

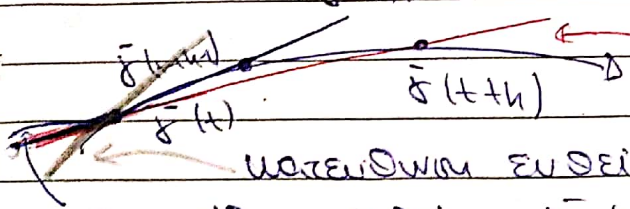
iii) Η παράγωγος $\bar f'(t)$, $t\in I$ ονομάζεται εφαπτόμενο διάνυσμα της $\bar f$ στο $\bar f(t)$ [ή στο t] (βλ. γεωμ. ερμηνεία σε λίγο)

iv) Αν $\bar f$ C^1 και $\bar f'(t)\neq \bar 0$, τότε η $\bar f$ λέγεται κανονική

Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου $\bar f'(t)\in\mathbb{R}^n$ καμπύλης $\bar f$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα $\bar f'(t) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\bar f(t+h)-\bar f(t)}{h}$

δίνει την κατεύθυνση της εφαπτομένης (ευθείας) $\bar f(t) + s\dfrac{\bar f'(t)}{\|\bar f'(t)\|}$, $s\in\mathbb{R}$, μιας κανονικής καμπύλης στο σημείο της $\bar f(t)$



← Η ευθεία $\dfrac{\bar f(t+h)-\bar f(t)}{h}$, $h\neq 0$

κατεύθυνση ευθείας: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\bar f(t+h)-\bar f(t)}{h} = \bar f'(t)$: Εφαπτόμενη ευθεία

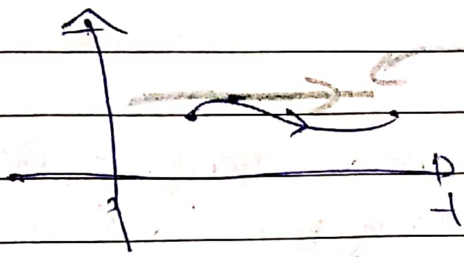
κατεύθυνση ευθείας: $\dfrac{\bar f(t+h_1)-\bar f(t)}{h_1}$ $(h_1\neq 0)$

Από φυσική άποψη: $\bar{\gamma}'(t)$ = διάνυσμα ταχύτητας στο $\bar{\gamma}(t)$

(ταχύτητα = $\|\bar{\gamma}'(t)\|$)

Παραδείγματα: 1) $\bar{\gamma}(t) = (t, f(t))$ αν $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφ/μη, τότε $\bar{\gamma}'(t) = (1, f'(t))$

$(\Rightarrow \bar{\gamma}'(t) \neq 0)$

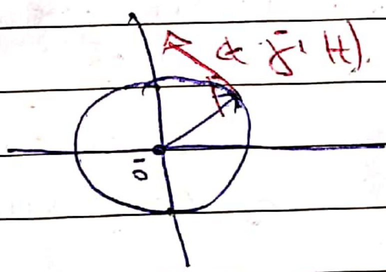


$(t_0, f(t_0)) + s\bar{\gamma}'(t),\ s \in \mathbb{R}$

Εφαπτόμενη ευθεία στην κατεύθυνση $\bar{\gamma}'(t)$

2) $\bar{\gamma}(t) = r(\cos t, \sin t) \Rightarrow \bar{\gamma}'(t) = r(-\sin t, \cos t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{\gamma}(t) \cdot \bar{\gamma}'(t) = 0 \quad \forall t$



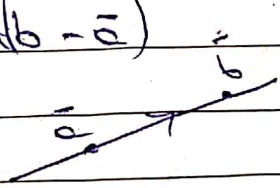
$\|\bar{\gamma}'(t)\| = r$

$\bar{\gamma}_2(t) = r(\cos(2t), \sin(2t)) = 2r(-\sin(2t), \cos(2t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{\gamma}_2(t) \cdot \bar{\gamma}_2'(t) = 0 \quad \forall t, \quad \|\bar{\gamma}_2'(t)\| = 2r$

3) $\bar{\gamma}(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a})$

$\bar{\gamma}'(t) = \bar{b} - \bar{a}$



Εφαρμογή των καμπυλών στις παραγώγους μιας απεικ. $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$:

Η κλίση (= παράγωγος της f στο $\bar{x}$ είναι κάθετη στο σύνολο στάθμης $f(\bar{x})$ της f σημείο (? δηλ.) $\bar{x} \in U$

(κάθετη σε σύνολο?) $L_f(\underbrace{f(\bar{x})}_{= c \in \mathbb{R}}) = \{ \bar{y} \in U : f(\bar{y}) = f(\bar{x}) \}$.

δηλ. $\forall$ διαφορίσιμη καμπύλη $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ με $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset L_f(f(\bar{x}))$ και $\gamma(0) = \bar{x}$: $Df(\bar{x}) \cdot \gamma'(0) = 0$

Παρατ. Προφανώς η $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, ~~$(f\circ\gamma)(t)$~~ είναι σταθερή (Γ) αφού $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \gamma(t) \in L_f(f(\bar{x}))$, δηλ.:

$\underbrace{f(\gamma(t))}_{= (f \circ \gamma)(t)} = \underbrace{f(\bar{x})}_{\in \mathbb{R}}$ $(\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$

$\Rightarrow (f \circ \gamma)'(t) = 0 \; \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow (f \circ \gamma)'(0) = 0$

Από την άλλη (κανόνας Αλυσίδας ∇), αφού γ διαφ/μη στο $t = 0$, f διαφ/μη στο $x = \gamma(0)$, προκύπτει ότι: $(f \circ \gamma)'(0) = Df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$

(Αύρο παράδειγμα: $f(x,y) = x^2 + y$)

Scanned with CamScanner